



## Серия №28. Композиция поворотов

17 июля

1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

**Теорема.** Композиция двух поворотов на угол  $\alpha$  и на угол  $\beta$  в случае  $\alpha + \beta \neq 360^\circ$  является поворотом на угол  $\alpha + \beta$ , в противном случае – параллельным переносом.

### Задачи

2. На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $CB$  треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $BCA_1$ ,  $CAB_1$ ,  $ABC_1$ . Как построить точку  $R_{C_1}^{60^\circ} \circ R_{B_1}^{60^\circ} \circ R_{A_1}^{60^\circ}(A)$ ?
3. На плоскости был нарисован пятиугольник и отмечены середины всех его сторон. Пятиугольник стёрли, середины сторон остались. Как при помощи циркуля и линейки восстановить пятиугольник?
4. Известно, что  $R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta = R_{O_3}^{\alpha+\beta}$ , и точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника.

**Определение.** Треугольник  $O_1O_2O_3$  называют треугольником центров поворотов.

5. **Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры – вершины правильного треугольника.
6. На сторонах  $AB$  и  $BC$  правильного треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $MN \parallel AC$ ,  $E$  – середина отрезка  $AN$ ,  $D$  – центр треугольника  $BMN$ . Найдите угол  $CDE$ .
7. На дуге  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , не содержащей точку  $A$ , взята точка  $D$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $BD = BE$  и  $CD = CF$ . Точка  $G$  – середина  $EF$ .  $DF$  вторично пересекает окружность в точке  $K$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $G$ ,  $K$  лежат на одной прямой.
8. На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$  как на диаметрах построили полуокружности. На  $AB$  и  $CD$  – внешним образом, а на  $BC$  и  $DA$  – внутренним. После чего отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  – середины дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Оказалось, что они образуют четырехугольник. Докажите, что  $KLMN$  – параллелограмм.
9. На сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построили равносторонние треугольники  $ABD$ ,  $BCE$ ,  $CAF$ . Затем стёрли все, кроме точек  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Восстановите треугольник  $ABC$  циркулем и линейкой.